$$B = \frac{M_{\max}}{Pm} = \frac{M_{\max}}{IS} \quad \text{(en el SI)},$$

$$B = \frac{M_{\max}}{Pm} = \frac{M_{\max}}{\frac{1}{c}} \quad \text{(en el sistema de Gauss).pendiente}$$

3 º. Si un contorno cerrado (con corriente) se encuentra en un campo magnético no uniforme (III.10.1.3º), en el que la inducción **B** varía a distancias comparables con las dimensiones lineales del contorno, sobre este último actuará la fuerza **F**.

$$F = Pmx\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \chi} pmy\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + pmz\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z},$$

donde P_{mx}, P_{my}, y P_{mz} son las proyecciones del valor $\mathbf{P}_m$ sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas. En particular, si el vector **B** está dirigido según el eje OX y sólo depende de la coordenada $\chi\,(B_x = B\,(\chi)_1 \;\; B_y = B_z = 0;\; \mathbf{B} = \mathbf{B}_x\mathbf{i})$ entonces

$$\mathbf{F} = Pmx\frac{dB}{dx}\mathbf{i}.$$

Por la acción de la fuerza **F**, el contorno con corriente, si no está sujeto, es arrastrado hacia la región en que el campo magnético es más intenso.

§ I I I. 10.5. Ley de la corriente total. Circuitos magnéticos.

1 º. Se llama *circulación del vector* **B** de inducción magnética a lo largo de un contorno cerrado *L,* la integral de forma

$$\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{B}d\mathbf{l}\cos(\mathbf{B}'\,\grave{}\,d\mathbf{l}) \;,$$

en la que *L* es un contorno cerrado de forma arbitraria, y *dl,* el vector de longitud elemental del contorno tomando en el sentido de su recorrido.

2 º. *Ley de la corriente total para un campo magnético en el vació:* la circulación del vector inducción del campo magnético a lo largo de un contorno cerrado en el vació es proporcional a la suma algebraica de las corrientes abarcadas por este contorno:

$$\oint_L \mathbf{B}\; d\,\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k \quad \text{(en el SI)},$$

$$\oint_L \mathbf{B}\; d\,\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\sum_{k=1}^{n} I_k \quad \text{(en sistema de Gauss)},$$

donde μ_0 es la constante magnética (en el SI) (III.10.2.2 º); *c*, la constante electrodinámica (III.10.2.2 º); y *n*, el número de conductores con corriente, abarcados

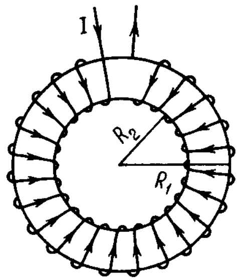

Fig. III.10.7.

Las características del campo magnético del toroide se calculan por las formulas siguientes

$$B = \mu_0\mu\frac{NI}{2\pi r}\,,\; H = \frac{NI}{2\pi r} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$B = \frac{1}{c}\mu\frac{2NI}{r}\,,\; H = \frac{1}{c}\frac{2NI}{r} \qquad \text{(en el sistema de Gauss)},$$

La inducción magnética *B* y la intensidad *H* del campo magnético en la línea axial del toroide constituyen

$$B_{\text{axil}} - \mu_0\mu\frac{NI}{2\pi R_{med}} = \mu_0\mu nI\,,\; H = nI \qquad \text{(en el SI)}$$

Aquí *N* es el numero de espiras del toroide con corriente *I*; *r*, el radio de cierta circunferencia trazada dentro del toro; $R_{med} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$, siendo R_1 y R_2, respectivamente, los radios externo e interno del toro; y *n*, el numero de espiras por unidad de longitud de la línea axial del toroide.

8º. *Solenoide* es una bobina cilíndrica de gran número de espiras de conductor que forman una línea helicoidal. Si las espiras de tocan o están muy cerca unas de otras, el solenoide se considera como un sistema de corrientes circulares del mismo radio (unidas en serie), cuyo eje es común.

El momento magnético de un solenoide (p. 4º) es igual a la suma vectorial de los momentos magnéticos de sus *N* espiras:

$$\mathbf{P}_m = NIS\mathbf{n}$$

donde *I* es la intensidad de la corriente en las espiras del solenoide **e**; *S*, el área de su sección transversal; y **n**, el vector unidad de la normal a la superficie *S*. el vector ***Pm*** está dirigido según el eje del solenoide, y su sentido coincide con el del campo magnético definido por la regla del sacacorchos (III.10.1.3º).

La inducción magnética ***B*** y la intensidad ***H*** del campo del solenoide en un punto arbitrario ***A*** que se encuentre en su eje, serán

$$B = \frac{\mu_0\mu}{2}nI(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1),\; H = \frac{B}{\mu_0\mu} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \oint_S B_n dS = 0 .$$

Este teorema es la expresión matemática de que en la naturaleza no existen cargas magnéticas en las cuales comiencen o terminen las líneas de inducción magnética (III.10.1.3 º).

La forma diferencial del teorema de Ostrogradski – Gauss para el campo magnético es una de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético (III.14.4.2 º).

7 º. Se llama *circuito magnético* el conjunto de cuerpos o zonas del espacio donde ha sido localizado el campo magnético.
Por ejemplo, la parte interior de un toroide (III.10.3.6º) y de un solenoide de longitud infinita (II.10.3.7º) son circuitos magnéticos. Para intensificar el campo magnético se utiliza circuitos magnéticos hechos de materiales con gran permeabilidad magnética relativa μ (III.10.2.1º), por ejemplo, de hierro. El cálculo de los circuitos magnéticos que constituyen una parte imprescindible de las máquinas eléctricas y de los dispositivos electrónicos del tipo de transformadores, electroimanes, etc., se basa en las leyes de estos circuitos.

8 º. *Ley de Ohm para un circuito magnético cerrado (fórmula de Hopkinson):*

$$\Phi_m = \frac{\varepsilon_m}{R_m} ,$$

donde Φ_m es el flujo magnético constante a lo largo de cada zona del circuito; $\mathcal{E}_m$ $= IN$, la *fuerza magnetomotriz:* (fmm) *(fuerza magnetizante)* (en el SI); *N*, el número de espiras de la corriente eléctrica *I* que magnetiza el circuito; y R_m , la resistencia magnética reluctancia total del circuito. La reluctancia de un circuito magnético de la longitud l_i es

$$R_{mi} = \int_0^{l_i} \frac{dl}{\mu_o \mu S} \quad \text{(en el SI)},$$

donde μ es la permeabilidad magnética relativa de un circuito dado; μ_o la constante magnética (en el SI) (III.10.2.2º); y *S* el área de la sección transversal del circuito. Si *S* = const. Entonces $R_{ml} = \dfrac{l_i}{\mu_o \mu S}$ (en el SI).

9 º. La reluctancia total R_m de los sectores del circuito magnético acoplados en serie constituye

$$R_m = \sum_{i=1}^{n} R_{mi} ,$$

donde R_{mi} , es la reluctancia del *i*-esimo sector del circuito magnético, y *n* el número de sectores del circuito completo.

Para un conductor rectilíneo infinitamente largo, ($\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = \pi$)

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi}\frac{2I}{r_0} , \; H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$B = \frac{1}{c}\mu \frac{2I}{r_0} , \; H = \frac{B}{\mu} \qquad \text{(en el sistema de Gauss)},$$

3º. Campo magnético en el centro de un *conductor rectangular con corriente* ***I***:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi}\frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab} , \; H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$B = \frac{1}{c}\mu \frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab} , \; H = \frac{B}{\mu} \qquad \text{(en el sistema de Gauss)},$$

donde *a* y *b* son los lados del rectángulo.

4º. *El momento magnético* P*m de un contorno* con corriente *I*, de la forma arbitraria, constituye

$$\mathrm{P}_m = I \int_S \mathrm{n} d\mathrm{S} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$\mathrm{P}_m = \frac{1}{c} I \int_S \mathrm{n} d\mathrm{S} \qquad \text{(en el sistema de Gauss)},$$

siendo **n** el vector unidad de la normal externa al elemento *dS* de la superficie *S* limitada por el contorno con corriente. En el caso de un contorno plano, la superficie *S* será plana y todas las normales tendrán el mismo sentido, por lo que

$$\mathrm{P}_m = IS\,\mathrm{n} , \; \mathrm{P}m = IS \qquad \text{(en el SI)}$$

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{c} IS\,\mathbf{n} , \; \mathrm{P}_m = \frac{1}{c} IS \qquad \text{(en el sistema de Gauss)}.$$

El vector P*m* está dirigido de tal modo que desde su extremo se ve la corriente pasar por el contorno en sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. III.10.5).

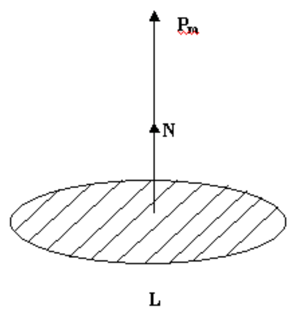

FIGURA III.10.5

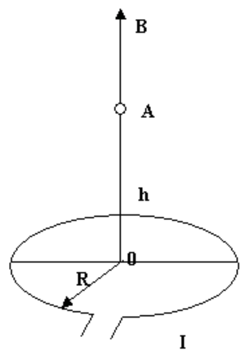

FIGURA III.10.6

$$\delta A^* = \frac{1}{c} I \, d\Phi_m^+ \text{ (en el sistema Gauss),}$$

donde $d\Phi_m$ es el flujo magnético (III.10.5.5 º) a través del área *dS* que barre el elemento del conductor, de longitud *dl*, durante su pequeña traslación; y *c*, la constante electrodinámica (III.10.2.2 º).

2 º. Cuando se desplaza un conductor de longitud finita con corriente, el trabajo elemental σA de las fuerzas de Ampére es la suma de los trabajos elementales correspondientes a los dos trazos elementales del conductor. Este trabajo es igual a la integral de σA^* calculada con arreglo a la longitud *l* del conductor.

$$\delta A = \int_l Id\,\Phi_m^* = I\int_l d\,\Phi_m^* = Id\,\Phi_m \text{ (en el SI),}$$

$$\delta A = \frac{1}{c} I \, d\Phi_m \quad \text{(en el sistema de Gauss),}$$

donde $d\Phi_m$ es el flujo magnético a través de la superficie que barre el conductor de longitud l durante su pequeña traslación

3 º. Si un conductor de longitud finita *l*, con corriente continua *I*, realiza una traslación, el trabajo de las fuerzas de Ampére en esta traslación será

$$\mathrm{A} = I\Phi_m,$$

donde y Φ_m es el flujo magnético a través de la superficie que barre el conductor al moverse.

4 º. El trabajo que realiza las fuerzas de Ampére al trasladar en el campo magnético un contorno plano y cerrado, con corriente continua *I*, desde la posición inicial *1* hasta la posición final *2*, constituye

$$\mathrm{A}_{12} = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}),$$

donde Φ_{m_1} y Φ_{m_2} son los flujos magnéticos embragados al contorno en las posiciones 1 y 2 es decir, los flujos magnéticos a través de la superficie que se extiende sobre el contorno. Al calcular estos flujos magnéticos, el sentido de la normal **n** (III.10.5.8º) se toma de acuerdo con el sentido de la corriente en el contorno según la regla del sacacorchos: desde el extremo del vector de la normal, la corriente en el contorno debe verse pasar en sentido contrario al de las agujas del reloj.

5 º. Si en un campo magnético se traslada, bajo la acción de las fuerzas de Ampére, una bobina de *N* espiras con corriente o, en general, un contorno de forma arbitraria, son correctas las formulas dadas anteriormente. Por ejemplo, durante una pequeña traslación de la bobina con corriente *I*, se efectuará el trabajo

$$\delta\mathrm{A} = I\sum_{i=1}^{N} d\Phi_{mi} = Id\left(\sum_{i=1}^{N}\Phi_{mi}\right) = I\,d\psi,$$

donde $\psi = \sum_{i=1}^{N}\Phi_{mi}$ es el *flujo magnético total* a través de las *N* espiras de la bobina, llamado también *flujo embragado* del *contorno.*

El vector **H** de intensidad del campo magnético es análogo al vector **D** de desplazamiento eléctrico (III.2.3.1º).

5º. Una carga eléctrica *q*, moviéndose en un medio homogéneo e isótropo ilimitado con velocidad **v**, engendra un campo magnético cuya inducción $\mathbf{B}_q$ se calcula por la formula

$$\mathrm{B}_q = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{q}{r^3}[\mathrm{vr}],\ \mathrm{B}_q = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{qv\operatorname{sen}\alpha}{r^2} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$\mathrm{B}_q = \frac{\mu}{c}\frac{q}{r^3}[\mathrm{vr}],\ \mathrm{B}_q = \frac{\mu}{c}\frac{qv\operatorname{sen}\alpha}{r^2} \qquad \text{(en el sistema de Gauss).}$$

donde α es el ángulo entre los vectores **v** y **r**, y **r** es el radio vector trazado desde la carga en movimiento hasta el punto considerado ***A*** del campo. Los vectores $\mathbf{B}_q$ y $\mathbf{H}_q$ están dirigidos perpendicularmente al plano que pasa por los vectores **v** y **r**.

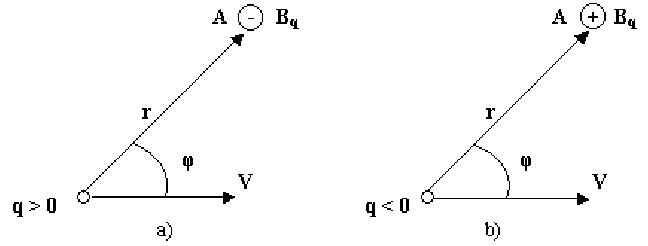

FIGURA III.10.3

Si $q > 0$, desde el extremo del vector $\mathbf{B}_q$ (y $\mathbf{H}_q$), el giro más corto desde **v** hasta **r** se verá que se efectúa en sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. III.10.3, a). Si $q < 0$, $\mathbf{B}_q$, (y $\mathbf{H}_q$) estará dirigido en sentido contrario (fig. III.10.3, b). El campo magnético de una carga en movimiento es variable, ya que al moverse la carga ***q***, incluso en el caso en que **v** = const, el radio vector **r** cambia de módulo y de dirección. El campo magnético de una carga móvil dependiente del ángulo (**vr**) no tiene simetría esférica, como en el caso del campo electrostático de una carga puntal (fig. III.1.2.3º). Este campo magnético posee simetría especular respecto de la dirección de **v**: es máximo en los puntos del plano que pasa por la carga, y es perpendicular al vector **v** (a condición de que $v \ll c$). En todos los puntos del campo, situados en la recta que coincide con el vector **v**, no existe campo magnético.

§ III.10.3. Algunos casos simples de campo magnético generado por corrientes continuas

1º. Valiéndose de la ley de Biot – Savart – Laplace se pueden hallar las características del campo magnético (**B** y **H**) de la corriente eléctrica que pasa por un conductor de dimensiones finitas y forma arbitraria. Por el principio de superposición de los campos (fig. III.2.2.2º), la inducción magnética **B** en un punto cualquiera del campo magnético de un conductor de corriente ***I*** constituye

$$\mathrm{B} = \int d\mathrm{B}$$

En el sistema de unidades de Gauss (IX), $B = \frac{c}{I}\left(\frac{dF}{dl}\right)_{máx}$ donde c es la constante electrodinámica (IX).

6º. La fuerza de Ampère no es central (I.2.3.4º), a diferencia de las fuerzas electrostáticas (III.1.2.2º). Esta fuerza es perpendicular a las líneas de inducción magnética y a los conductores con corriente.

§ III.10.2. Ley de Biot-Savart-Laplace

1º. *La ley de Biot – Savart – Laplace* define la inducción magnética en un punto cualquiera del campo magnético generado por la corriente eléctrica continua que pasa por un conductor cuya forma puede ser la que se quiera. El vector *d***B** de la inducción magnética en un punto cualquiera *C* del campo magnético generado por un elemento del conductor de longitud *dl* y con corriente **I**, se calcula por la formula

$$d\mathrm{B} = k\mu \frac{I}{r^3}[d\mathrm{l}\mathrm{r}]$$

en la que *d***l** es el vector de la longitud (III.10.1.4º); r, el radio vector trazado desde el elemento del conductor *d***l** hasta el punto *C* (fig. III.10.2); r, el modulo del radio vector **r**; *k*, un coeficiente que sólo depende del sistema de unidades de medida que se elija;

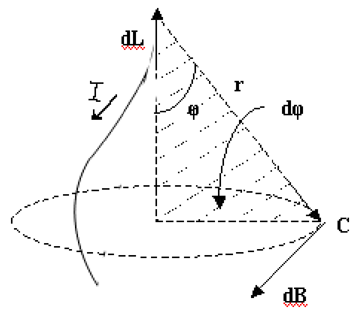

FIGURA III.10.2

y μ, una magnitud adimensional que caracteriza las propiedades magnéticas del medio, denominada *permeabilidad magnética relativa del medio*. La permeabilidad μ no depende de las unidades de medida que se elijan, y para el vacío es igual a la unidad. Para todas las substancias, excepto las ferromagnéticas, μ difiere poco de la unidad (III.13.5.1º).
La definición general de μ puede verse en el III.13.4.5º.

2º. En el sistema internacional de unidades SI, $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$, donde $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m es la *constante magnética* (IX). En el sistema de Gauss, $k = \frac{1}{c}$, siendo $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s la constante electrodinámica (IX).

La ley de Biot – Savart –Laplace en el SI tiene la forma:

Capítulo III.10. Campo magnético de la corriente continua

§ III.10.1. Campo magnético. Ley de Ampere

1º. *El campo magnético* es una de las formas del campo electromagnético (III.2.1.2º). El mismo es generado por partículas y cuerpos portadores de cargas eléctricas que se mueven. Este campo actúa solamente sobre las cargas eléctricas y los cuerpos portadores de ellas que se hallan en movimiento.

También son fuentes de campo magnético los campos eléctricos alternativos (corriente de desplazamiento) (III.14.3.2º).

2º. La característica de fuerza fundamental del campo magnético es el *vector inducción magnética* **B** (*vector de inducción del campo magnético*). El vector **B** se introduce por uno de los tres procedimientos:

a) partiendo de la ley de Ampere (p. 4º),

b) por la acción del campo magnético sobre un cuadro con corriente (III.10.4.2º),

c) partiendo de la expresión de la fuerza de Lorentz (III.11.1.3º).

3º. Para la presentación grafica de los campos magnéticos se emplea el concepto de líneas de inducción magnética. Se llaman *líneas de inducción magnética* (*líneas de fuerza del campo magnético*) las trazadas en el campo magnético de tal forma que el vector **B**, en cada línea de fuerza, este dirigido según la tangente a ella. El sentido del vector **B** y de las líneas de inducción del campo magnético se determina por la *regla de Maxwell* (*regla del sacacorchos*); si el sacacorchos (de rosca a derechas) se atornilla siguiendo el sentido del vector densidad de corriente en el conductor (III.7.2.3º), el sentido en que se mueve la manilla indica el de las líneas de inducción magnética y del vector inducción.

Las líneas de inducción del campo magnético no se interrumpen en ningún punto, es decir, ni empiezan ni terminan. Estas líneas son cerradas, o van del infinito al infinito, o se arrollan infinitamente sobre una superficie, llenándola por todas partes, pero sin retornar nunca a un punto cualquiera de la misma. Este ultimo caso se observa, por ejemplo, en el campo que genera un sistema constituido por una corriente circular y otra directa infinita que pasa por el centro de la primera y es perpendicular al plano de aquella.

Un campo magnético se dice que es *uniforme u homogéneo* (*campo magnético uniforme*) si el vector **B** es constante en todos sus puntos. En caso contrario el campo es *no uniforme* o *no homogéneo* (*campo magnético no uniforme*).

4º. La fuerza con que el campo magnético actúa sobre los conductores con corriente que se encuentran en él, se conoce con el nombre de *fuerza de Ampere.*

Ley de Ampere: la fuerza elemental $d\mathbf{F}$ que actúa sobre el elemento de longitud dl de un conductor con corriente situado en un campo magnético, es directamente proporcional a la intensidad de la corriente que pasa por conductor y al producto vectorial del elemento de longitud $d\mathbf{l}$ por la inducción magnética **B**:

$$d\mathrm{F} = I\left[d\mathrm{lB}\right] \qquad \text{(en el SI)}$$

$$d\mathrm{F} = \frac{I}{c}\left[d\mathrm{lB}\right] \qquad \text{(en el sistema de Gauss, IX).}$$

Aquí $d\mathbf{l}$ es un vector de módulo dl cuyo sentido coincide con el vector densidad de la corriente **j** en el conductor (III.7.2.3º), los paréntesis cuadrados indican producto cruz.

La fuerza de Ampère **F** que actúa en el campo magnético sobre un conductor con