$$B=\frac{1}{c}2\pi\mu nI\left(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\right),\ H=\frac{B}{\mu}$$ (en el sistema de Gauss),

donde $n=\frac{N}{L}$ es el número de espiras por unidad de longitud del solenoide; α_2 y α_1, los ángulos bajo los cuales se ven desde el punto ***A*** los extremos del solenoide ($\alpha_2<\alpha_1$).

$$\cos\alpha_1=-\frac{l_1}{\sqrt{R^2+l_1^2}}\quad,\quad\cos\alpha_2=\frac{L-l_1}{\sqrt{R^2+\left(L-l_1\right)^3}}$$

L es la longitud del solenoide (fig. III.10.8); y *R*, el radio de la bobina cilíndrica.

9º. Si *L>>R*, en el campo magnético dentro del solenoide, en los puntos de su eje bastante alejados de los extremos, tendremos

$$B=\mu_0\mu nI,\ H=nI$$ (en el SI)

$$B=\frac{1}{c}4\pi\mu nI,\ H=\frac{1}{c}4\pi nI$$ (en el sistema de Gauss),

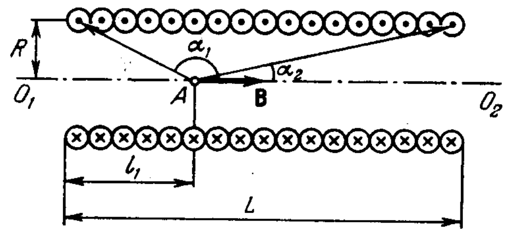

Fig. III.10.8.

La inducción magnética *B* y la intensidad *H* del campo magnético de un solenoide suficientemente largo, en los puntos de su eje que coinciden con los extremos, son numéricamente iguales a

$$B=\frac{\mu_0\mu}{2}nI,\ H=\frac{1}{2}nI$$ (en el SI)

$$B=\frac{1}{c}2\pi\mu nI,\ H=\frac{1}{2}2\pi nI$$ (en el sistema de Gauss).

§ III. 10.4. Interacción de conductores. Acción del campo magnético sobre los conductores con corriente

1º. La fuerza de Ampere (I I I.10.1.4º.) que actúa sobre el trozo elemental de longitud dl de un conductor rectilíneo con corriente I_1 por parte de otro conductor rectilíneo largo con corriente I_2, situado paralelamente al primero y la distancia a de él, es numéricamente igual a

$$dF=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{a}dl$$ (*en el* SI).

$$dF=\frac{1}{c^2}\mu\frac{2I_1I_2}{a}dl$$ (En el sistema de Gauss)

donde μ_0 es la constante magnética en el SI (III.10.2.2 º), y *c*, la constante electrodinámica (III.10.2.2 º). La fuerza *dF* es la fuerza de la interacción magnética (III.11.1.4 º).

Se supone que la longitud de los conductores es muchas veces mayor que la distancia *a* entre ellos, y que el elemento *dl* se halla lejos de los extremos del primer conductor. Se considera además que los conductores se encuentran en un medio homogéneo isótropo cuya permeabilidad magnética relativa es μ.

La fuerza *F* que actúa sobre un conductor con corriente, de longitud finita *l,* constituye

$$dF=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{a}dl$$ (En el SI),

$$dF=\frac{1}{c^2}\mu\frac{2I_1I_2}{a}l$$ (En el sistema de Gauss).

Los conductores cuyas corrientes I_1 e I_2 tiene el mismo sentido, se traen, y los conductores cuyas corrientes tienen sentidos opuestos, se repelen entre si (véase también III.11.1.4º).

2 º. Un contorno conductor plano, cerrado de forma geométrica arbitraria, con corriente, situado en un campo magnético homogéneo (III.10.1.2º), experimenta la acción del momento de rotación de las fuerzas **M**:

$$\mathbf{M}=[\mathbf{p}m],$$

donde $\mathbf{P}_m$ es el vector momento magnético del contorno con corriente (III.10.3.4º), y **B**, el vector inducción magnética del campo (III.10.1.2º). El momento de rotación es perpendicular al plano formado por los vectores $\mathbf{P}_m$ y **B**, y su sentido es tal que desde el extremo **M** se ve que el giro del vector $\mathbf{P}_m$ hacia el vector **B** según el ángulo menor, se realiza en sentido contrario al de las agujas del reloj. El momento de rotación tiene a poner el contorno en posición de equilibrio estable, en la cual los vectores $\mathbf{P}_m$ y **B** están orientados paralelamente entre sí.

Partiendo de la formula anterior se puede dar la definición de la inducción magnética *B:* (III.10.1.2º): el módulo del vector inducción magnética en un punto dado de un campo magnético uniforme es igual al valor máximo del momento de fuerzas $M_{\max}$ que actúa en los alrededores de este punto sobre un contorno plano, cerrado y pequeño, con corriente, que tenga el momento magnético de módulo unidad P_m**:**

5º. El campo magnético generado por una espira circular con corriente, en un punto cualquiera ***A*** del eje de esa espira (fig. III.10.6) tendrá

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2\mathbf{P}m}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}},\ \mathrm{H}=\frac{\mathrm{B}}{\mu_0\mu} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$\mathbf{B} = \mu\frac{2\mathbf{P}m}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}},\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \qquad \text{(en el sistema de Gauss),}$$

aquí **P***m* es el momento magnético de la espira circular con corriente (p. 4º).

Los módulos de los vectores **B** y **H** son

$$B = \frac{\mu_0\mu}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0\mu IS}{2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}},\quad H=\frac{B}{\mu_0\mu} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{c}\mu\frac{2\pi IR^2}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{c}\mu\frac{2IS}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}},\quad H = \frac{B}{\mu} \qquad \text{(en el sistema de Gauss)}$$

en los que *h* es la distancia desde el punto ***A*** hasta el centro de la espira; ***R***, el radio de esta última; y ***S***, su superficie.

6º. El campo magnético en el centro de la espira circular (p. 5º) tendrá

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2\mathbf{P}m}{R^3},\ \mathrm{H}=\frac{\mathrm{B}}{\mu_0\mu} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$\mathbf{B} = \mu\frac{2\mathbf{P}m}{R^3},\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \qquad \text{(en el sistema de Gauss),}$$

Los módulos de los vectores **B** y **H** son

$$B = \mu_0\mu\frac{I}{2R},\ H = \frac{I}{2R} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$B = \frac{2\pi}{c}\mu\frac{I}{R},\ H = \frac{1}{c}\frac{2\pi I}{R} \qquad \text{(en el sistema de Gauss),}$$

El campo magnético está dirigido según el eje de la espira y es perpendicular al plano de la misma (fig. III.10.6).

7º. *El toroide* es una bobina anular cuyas espiras van arrolladas sobre un núcleo en forma de toro (fig. III.10.7). El campo magnético de un toroide está íntegramente localizado dentro de su volumen.

por el contorno *L* de forma arbitraria. Esta ley es correcta para conductores con corriente de cualesquiera forma y dimensiones.

Al calcular la suma algebraica de las corrientes, una corriente se considera positiva si desde el extremo del vector densidad de corriente (III.7.2.3º) se ve que el recorrido del contorno *L* se efectúa en sentido contrario al de las agujas del reloj. En caso contrario la corriente se considera negativa.

La generalización de la ley de la corriente total para el campo magnético **B** en un medio cualquiera véase en III.13.4.2º .

3 º. A diferencia del campo de potencial electrostático, en el que la circulación de la intensidad **E** a lo largo de cualquier contorno cerrado es igual a cero (III.3.1.4 º), el campo magnético es *rotacional (campo magnético rotacional).* En este campo la circulación del vector **B** de inducción del campo magnético a lo largo de un contorno cerrado es distinta de cero. Si el contorno *L* no abarca corrientes, la circulación del vector **B** a lo largo de este contorno será igual a cero. Pero esto no varía el carácter rotacional del campo magnético.

4 º. La ley de la corriente total, tanto para el vacío como para un medio arbitrario, se puede escribir en forma de circulación del vector intensidad **H** (III.10.2.3 º) a lo largo de cualquier contorno *L* que abarque las corrientes:

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{(en el SI),}$$

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\sum_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{(en el sistema de Gauss).}$$

Si el contorno *L* no abarca corrientes, la circulación del vector **H** a lo largo de él será igual a cero.

5 º. Se da el nombre de *flujo del vector* **B** *de inducción magnética (flujo magnético)* a través de una superficie pequeña de área *dS,* a la magnitud física escalar $d\Phi_m$:

$d\Phi_m = \mathbf{B}d\mathbf{S} = \mathbf{B}_n dS = \mathrm{B}\ dS\ \cos(\widehat{\mathbf{Bn}})$, en la que *d***S**; **n** *dS;* **n** es el vector unidad de la normal a *dS*; y B_n, la proyección del vector *B* sobre la dirección de la normal (fig.III.10.9). El flujo magnético Φ_m a través de cualquier superficie *S* constituye

$$\Phi_n = \int_S \mathbf{B}\, d\mathrm{S} = \int_S B_n\, d\mathrm{S}\ .$$

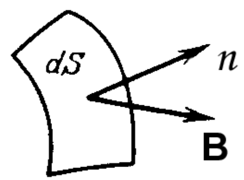

Fig. III.10.9.

Al calcular esta integral, los vectores **n** de las normales a las áreas *dS* deben dirigirse a un mismo lado respecto de la superficie *S*. Así, si la superficie *S* es cerrada, los vectores **n** deberán ser todos externos o todos internos.

Si el campo es uniforme y *S* es una superficie plana situada perpendicularmente al vector **B**, entonces $B_n = B = \mathrm{const}$ y $\Phi_m = BS$.

6 º. *Teorema de Ostrogradsi – Gauss para el campo magnético:* el flujo magnético a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a cero:

donde $d\mathbf{B}$ es la inducción magnética del campo engendrado por un elemento del conductor de longitud ***dl***. La integral se extiende a toda la longitud del conductor ***L***.

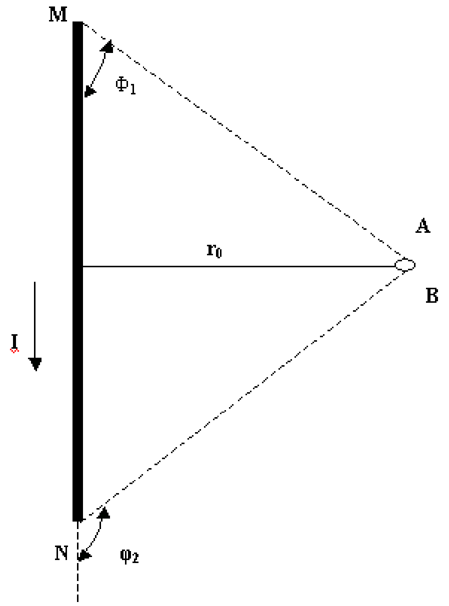

FIGURA III.10.4

2º. *Un conductor rectilíneo N M con corriente **I*** genera en un punto cualquiera **A** un campo magnético de inducción **B** e intensidad **H** (En todos los ejemplos del párrafo III.10.3 se supone que el medio es homogéneo e isótropo y ocupa todo espacio donde se encuentra el campo magnético.):

$$B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{r_0}\left(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\right),\quad H=\frac{B}{\mu_0\mu} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$B=\frac{1}{c}\mu\frac{I}{r_0}\left(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\right),\quad H=\frac{B}{\mu} \qquad \text{(en el sistema de Gauss),}$$

donde r_0 es la distancia desde el punto ***A*** hasta el conductor; φ_1 y φ_2 son los ángulos que forman los radios vectores trazados desde el extremos inicial y final del conductor hasta el punto ***A*** (fig. III.10.4); μ, la permeabilidad magnética relativa del medio; y μ_0, las constante magnética en el SI (fig. III.10.2.2º).

Si se acoplan paralelamente *n* reluctancias, la resistencia magnética total R_m del circuito será

$$R_m=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{R_{mi}}}$$

10 º. Se denomina nudo de circuito magnético la región del espacio o los cuerpos donde existen más de dos direcciones de las líneas de inducción magnética (III.10.1.3 º).

Primera ley de Kirchhol para los circuitos magnéticos derivados (bifurcados): la suma algebraica de los flujos magnéticos de los sectores del circuito que concurren en un nudo es igual a cero.

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi_{mi}=0,$$

donde n es el número de sectores que concurren en el nudo (véase III.8.3.1 º).

El flujo magnético se considera positivo si las líneas de inducción confluyen en el nudo. Si estas líneas salen del nudo, el flujo Φ_{mi} se considera negativo.

11 º. *Segunda ley de Ktrechhol para los circuitos magnéticos*, en cualquier contorno cerrado elegido arbitrariamente en un circuito magnético derivado, la suma algebraica de los productos de los flujos magnéticos por las reluctancias de los correspondientes del circuito (p. 8 º), es igual a la suma algebraica de las fuerzas magnéticas aplicadas en este contorno (p. 8 º).

$$\sum_{i=1}^{k}\Phi_{mi}R_{mi}=\sum_{i=1}^{\kappa}\varepsilon_{mi},$$

siendo *k* el número de sectores que componen el circuito cerrado (compárese con III.8.3.2º), Φ_{mi} *y* ε_{mi}, se consideran positivos si los sentidos de sus respectivas líneas de inducción (III.10.1.3 º) coinciden con el sentido, arbitrariamente elegido, del recorrido del contorno.

§ III.10.6 Trabajo de traslación de un conductor con corriente en un campo magnético.

1 º. Bajo la acción de la fuerza de Ampére (III.10.1.4 º) se efectúa la traslación, en el campo magnético, de un conductor con corriente, un sujeto. El trabajo elemental realizado por la fuerza de Ampére al trasladar un conductor con corriente l de longitud elemental d constituye

$$\delta A^* = I\, d\Phi_m + \text{(en el SI)},$$

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathrm{lr}].$$

Esta forma de escribir la ley de Biot – Savart –Laplace y todas las ecuaciones del campo electromagnético, se llama *racionalizada*.
Al producto $\mu_0 \mu$ se le da a veces el nombre de *permeabilidad magnética absoluta del medio*.

En el sistema gaussiano de unidades, $dB = \frac{1}{c} \frac{I}{r^3} [d\mathrm{lr}]$.
El módulo *dB* del vector *d***B** es

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl\,sen\,\alpha}{r^2} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$dB = \frac{\mu}{c} \frac{Idl\,sen\,\alpha}{r^2} \qquad \text{(en el sistema de Gauss),}$$

donde α es el ángulo entre los vectores $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{r}$.

3º. Se denomina *intensidad del campo magnético* **H** la característica vectorial del campo magnético que, para un medio homogéneo isótropo, se relaciona con **B** del modo siguiente:

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$H = \frac{B}{\mu} \qquad \text{(en el sistema de Gauss).}$$

La relación universal entre los vectores **B** y **H** para el campo magnético en un medio arbitrario, así como una definición mas general del vector intensidad **H**, se dan en III.13.4.4º.

La intensidad del campo magnético de una corriente eléctrica en un medio homogéneo isótropo no depende de las propiedades magnéticas de éste:

$$dH = \frac{I}{4\pi r^3} [d\mathrm{lr}], \; dH = \frac{Idl\,\mathrm{sen}\,\alpha}{4\pi r^2} \qquad \text{(en el SI)}$$

$$dH = \frac{I}{cr^3} [d\mathrm{lr}], \; dH = \frac{Idl\,\mathrm{sen}\,\alpha}{cr^2} \qquad \text{(en el sistema de Gauss).}$$

donde α es el ángulo entre los vectores $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{r}$.

4º. De la comparación de las características vectoriales de los campos eléctrico (**E** y **D**) y magnético (**B** y **H**) se deduce que el vector intensidad del campo eléctrico **E** es análogo al vector inducción **B** del campo magnético. Tanto el uno como el otro determinan la acción de la fuerza de los campos y dependen de las propiedades del medio en el cual se generan esos campos.

6 º. El trabajo de desplazamiento en un campo magnético de un conductor o un contorno cerrado con corriente continua, se realiza a expensas de la energía que se gasta en la fuente de corriente (III.8.1.3 º).

corriente y de longitud finita constituye donde la integración se extiende a toda la longitud del conductor.

$$\mathrm{F} = \int I\left[d\,\mathrm{lB}\right]$$

En el caso de un campo magnético uniforme (p.3º),

$$F = IBl\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad \text{(en el SI)}$$

$$F = \frac{I}{c}Bl\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad \text{(en el sistema de Gauss),}$$

siendo $\propto$ el ángulo entre el vector densidad de la corriente en el conductor y el vector **B**. en la fig. III.10.1 se muestra la disposición mutua de los vectores *d***F**, **B** y *d***I**. Si *d***I** ⊥ **B**, el sentido de la fuerza *d***F** se halla por la *regla de la mano izquierda*; si se dispone la

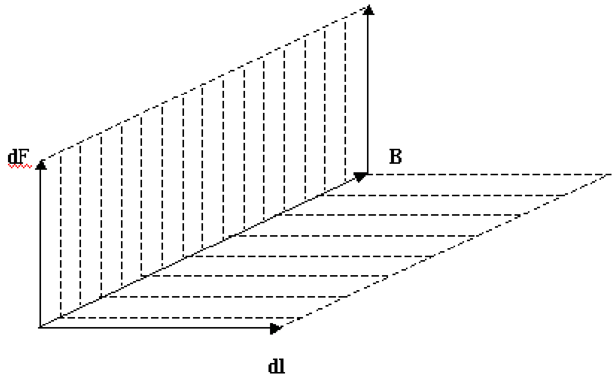

FIGURA III.10.1

mano izquierda abierta, con el pulgar separado y los cuatro dedos juntos, de modo que el vector inducción magnética entre por la palma normalmente y los cuatro dedos señalen el sentido de la corriente eléctrica, el pulgar indicara el sentido de la fuerza que actúa sobre el conductor con corriente que se encuentra en el campo magnético. En la fig. III.10.1 se puede ver que el vector *d***F** está dirigido perpendicularmente al plano que pasa por los vectores *d***l** y **B**, de manera que, desde el extremo de *d***F**, el giro más corto desde el vector *d***l** hasta el vector **B** se verá que se realiza en sentido contrario al de las agujas del reloj. En otras palabras, el sentido del vector *d***F** coincide con el producto vectorial [*d***lB**].

5º. De la ley de Ampère se deduce que el vector de inducción magnética en el SI es numéricamente igual que al limite de la relación entre la fuerza que ejerce el campo magnético sobre un elemento del conductor con corriente eléctrica, y el producto de intensidad de la corriente por dicho elemento, cuando la longitud de éste tiende a cero y el elemento está situado en el campo de tal modo que el limite antedicho adquiere el valor máximo:

$$B = \frac{1}{I}\left(\frac{dF}{dl}\right)_{máx}$$