

Esta ecuación expresa la *ley de variación del momento del impulso de un sistema*. Esta ley es válida, en particular, para un sólido sujeto con articulación en un punto O en torno al cual gira. En este caso la ecuación anterior expresa la *ley fundamental de la dinámica del sólido que gira alrededor de un punto fijo*.

En proyecciones sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares fijo con origen en el punto O , la ley de variación del momento del impulso del sistema se escribe en la forma

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{ext}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^{ext}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{ext}.$$

Aquí L_x, L_y, L_z y $M_x^{ext}, M_y^{ext}, M_z^{ext}$, son, respectivamente, los momentos del impulso del sistema y los momentos resultantes de las fuerzas externas respecto de los respectivos ejes de coordenadas.

2º. Ejemplo. Precesión regular de un giróscopo bajo la acción de su gravedad. Se llama *giroscopio* o *giróscopo (simétrico)* un sólido simétrico que gira rápidamente alrededor de un eje de simetría, el cual puede variar su dirección en el espacio. El giróscopo tiene tres grados de libertad (I.1.5.6º) si está sujeto a un punto fijo perteneciente a su eje y llamado *centro de sus- pensión del giróscopo*. Si el centro de suspensión coincide con el centro de gravedad C del giróscopo, se dice que éste está *equilibrado* o que el *giróscopo es astático*: la acción que sobre él ejerce la gravedad no provoca variaciones en su estado de rotación. En el caso contrario el giróscopo se llama *pesado* (fig. 1.4.3). Bajo la acción del momento de la fuerza de gravedad respecto del punto O ,

$$M^{ext} = [r_C mg],$$

el giróscopo pesado da vueltas alrededor de este punto de tal manera que su eje OZ' gira uniformemente alrededor del eje vertical OZ describiendo la superficie cónica que muestra la fig. 1.4.3 con trazos. Este movimiento del giróscopo se llama *precesión regular*.

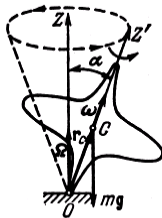


FIG. 1.5.1.

Si la velocidad angular de la precesión $\Omega \ll \omega$ (ω es la velocidad angular de la rotación propia del giróscopo alrededor del eje de simetría OZ'), se puede considerar aproximadamente que el momento del impulso del giróscopo L con respecto al punto O está dirigido a lo largo de su eje OZ' y es igual a

$$L = J\omega,$$

donde J es el momento de inercia del giróscopo con relación al eje OZ' . Por esto

$$\frac{dL}{dt} = [r_C mg] = \left[-\frac{r_C}{J\omega_z} L mg \right] = [\Omega L],$$

siendo $\Omega = -\frac{m r_C}{J \omega_z} g$ la velocidad angular de precesión, $\omega_z = \omega$ en el caso representado en la fig. 1.4.3. Cuanto mayor es la velocidad angular de la rotación propia del giróscopo, tanto más lenta es su precesión.

3º. La energía cinética de un sólido que gira alrededor de un punto fijo con la velocidad angular o es

$$W_c = \frac{J\omega^2}{2},$$

donde J es el momento de inercia del cuerpo respecto del eje instantáneo de rotación (I.1.5.6º).

El trabajo elemental realizado durante un pequeño intervalo de tiempo dt por la fuerza F que actúa sobre el cuerpo es

$$\delta A = M\omega dt = M d\varphi = M_\omega d\varphi,$$

en esta expresión, $M = [rF]$ es el momento de la fuerza F con relación al punto O (r es el radio vector trazado desde O al punto de aplicación de la fuerza F), $d\varphi = \omega dt$ y $d\varphi = \omega dt$ son el ángulo de rotación y el vector de rotación elemental del cuerpo durante el tiempo dt , y M_ω es el momento de la fuerza F respecto del eje instantáneo de rotación del cuerpo, igual a la proyección del vector M sobre la dirección del vector ω . El incremento de la energía cinética del sólido durante el tiempo dt es igual al trabajo de las fuerzas externas:

$$dW_c = M_\omega^{ext} d\varphi,$$

donde M_ω^{ext} es el momento resultante de las fuerzas externas respecto del eje instantáneo de rotación del cuerpo (I.4.1.3º).

4º. Si el sólido gira alrededor del eje OZ con velocidad angular ω , su momento de impulso con relación a este eje

$$L_z = J_z \omega_z \quad \text{y} \quad L_z = J_z \omega.$$

Aquí J_z es el momento de inercia del cuerpo respecto del eje OZ , que no varía con el tiempo ($J_z = \text{const}$), y $|\omega_z| = \omega > 0$ ($\omega_z = \omega$, si los vectores ω y el versor del eje OZ coinciden en dirección, y $\omega_z = -\omega$ en el caso contrario).

La *ley fundamental de la dinámica del sólido que gira alrededor de un eje fijo OZ* es:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{ext} \quad \text{o} \quad \epsilon = \frac{1}{J_z} M_z^{ext},$$

siendo $\epsilon = d\omega/dt$ la aceleración angular del cuerpo.

De la última fórmula se deduce que el momento de inercia del sólido respecto a cualquier eje fijo es la medida de la inercia de dicho sólido que gira alrededor de ese eje: cuanto mayor sea el momento de inercia del cuerpo, tanto menor será la aceleración angular que adquiere bajo la acción de un mismo momento de las fuerzas externas.

5º. La energía cinética del sólido que gira alrededor de un eje fijo OZ con la velocidad angular ω , es

$$W_c = \frac{1}{2} J_z \omega^2.$$

El trabajo elemental que realiza durante un pequeño intervalo de tiempo dt la fuerza F aplicada al cuerpo es

$$\delta A = M_z \omega dt = M_z d\varphi,$$

donde M_z es el momento de la fuerza F con respecto al eje de rotación OZ (el versor del eje OZ coincide en dirección con el vector ω).

velocidades $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C$ (o sea, con respecto al sistema de referencia con origen en el punto C , animado de movimiento de traslación), son iguales:

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i m_i \mathbf{v}'_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i] = \mathbf{L}_C,$$

donde $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C$ es el radio vector del i -ésimo punto en el sistema de referencia que se mueve junto con el centro de inercia. La relación entre los valores del momento del impulso del sistema mecánico L , respecto del punto fijo O , y L_C , respecto del centro de inercia, tiene la forma

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + [\mathbf{r}_C \mathbf{p}],$$

siendo $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$ el impulso del sistema en su movimiento absoluto.

§ I.4.2. Momento de inercia

1°. Se llama *momento de inercia de un sistema mecánico* con respecto a un eje fijo a , la magnitud física J_a igual a la suma de los productos de las masas de los n puntos materiales que componen el sistema, por los cuadrados de sus distancias al eje:

$$J_a = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2,$$

donde m_i y ρ_i son, respectivamente, la masa del i -ésimo punto material y su distancia al eje.

El momento de inercia de un cuerpo

$$J_a = \int_{(m)} \rho^2 dm = \int_{(V)} \rho^2 D dV,$$

en esta igualdad $dm = D dV$ es la masa de un pequeño elemento de volumen dV ; D , la densidad, y ρ , la distancia del elemento dV al eje a .

Si el cuerpo es homogéneo, es decir, si la densidad es igual en todas sus partes, entonces

$$J_a = D \int_{(V)} \rho^2 dV.$$

El momento de inercia de un cuerpo J_a es la medida de la inercia del mismo en el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo a (I.4.3.4°), de un modo semejante a comerla masa del cuerpo es la medida de su inercia en el movimiento de traslación.

2°. El momento de inercia de un cuerpo dado con relación a un eje cualquiera depende no sólo de la masa, de la forma y de las dimensiones del cuerpo, sino también de su posición con respecto a dicho eje. De acuerdo con el *teorema de Steiner (sobre la traslación de los ejes de inercia)*, el momento de inercia J de un cuerpo con relación a un eje arbitrario es igual a la suma del momento de inercia J_C de este cuerpo con respecto al eje que pasa por su centro de inercia y es paralelo al eje considerado, y del producto de la masa del cuerpo m por el cuadrado de la distancia d entre dichos ejes:

$$J = J_C + m d^2.$$

3°. Momentos de inercia en los cuerpos homogéneos de formas más simples, respecto de algunos ejes (tabla I.4.1).

Respectivamente, el momento del impulso de un sistema cerrado respecto de su centro de inercia (I.4.1.7°) no varía con el tiempo:

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} \equiv 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{L}_C = \text{const.}$$

De un modo semejante a las leyes de conservación del impulso y de la energía, la ley de conservación del momento de impulso rebasa los límites de la mecánica clásica. Esta ley es una de las más fundamentales de la física, ya que está relacionada con una propiedad determinada de la simetría del espacio, su isotropía. La isotropía del espacio se manifiesta en que las propiedades físicas y las leyes del movimiento de un sistema cerrado no dependen de las direcciones que se elijan de los ejes de coordenadas del sistema inercial de referencia, o sea, no varían cuando el sistema cerrado en conjunto gira a un ángulo cualquiera en el espacio.

De acuerdo con las ideas memoradas, pueden tener momento de impulso no sólo las partículas y los cuerpos, sino también los campos, y las partículas elementales y los sistemas contruidos con ellas (por ejemplo, los núcleos atómicos) pueden poseer un momento de impulso no relacionado con su movimiento en el espacio, que recibe el nombre de espín (tabla VIII.2.1).

2°. Con arreglo a los sistemas que describe la mecánica clásica (newtoniana), la ley de conservación del momento de impulso se puede considerar como una consecuencia de las leyes de Newton. Para un sistema mecánico cerrado, el momento resultante de las fuerzas externas respecto de un punto fijo cualquiera (y también con relación al centro de inercia del sistema) es idénticamente igual a cero: $\mathbf{M}^{\text{ext}} = 0$ (y respectivamente $\mathbf{M}_C^{\text{ext}} = 0$, véase (I.4.1.6°), donde $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$), y de (I.4.3.1°) se deduce la ley de conservación del momento de impulso:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i] = \text{const.},$$

donde m_i , \mathbf{r}_i y \mathbf{v}_i son, respectivamente, la masa, el radio vector y la velocidad del i -ésimo punto material del sistema compuesto de n puntos como éste.

Respectivamente (véase I.4.1.7° y I.2.5.3°),

$$\mathbf{L}_C = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i m_i \mathbf{v}'_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i] = \text{const.},$$

siendo $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C$, $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C$, y \mathbf{r}_C y \mathbf{v}_C son el radio vector y la velocidad del centro de inercia del sistema.

3°. Si el sistema no es cerrado, pero las fuerzas externas que actúan sobre él son tales que su momento resultante respecto de un punto fijo O son idénticamente iguales a cero ($\mathbf{M}^{\text{ext}} = 0$), entonces, de acuerdo con las leyes de Newton (I.4.3.1°), el momento del impulso del sistema con relación a este mismo punto O no varía con el tiempo: $L = \text{const.}$ Esta condición la cumple, por ejemplo, prácticamente el giroscopo equilibrado (I.4.3.2°) con tres grados de libertad cuyo momento de las fuerzas de rozamiento en la suspensión es bastante pequeño. Cualesquiera que sean los giros que se den al soporte de este giroscopo, que mantiene en reposo su centro de inercia, el eje del giroscopo conserva su orientación respecto del sistema inercial de referencia fijo. (Se supone que el vector L está dirigido según el eje del giroscopo. En el caso contrario el giroscopo libre efectúa una precesión regular: su eje describe una superficie cónica circular cuyo vértice se encuentra en el centro de suspensión, y el eje está dirigido a lo largo del vector $L = \text{const.}$)

De ordinario $\mathbf{M}^{\text{ext}} \neq 0$ y $L \neq \text{const.}$ Pero si el momento resultante de las fuerzas externas respecto de cualquier eje fijo que pase por el punto O es idénticamente igual a cero, el

componente del vector \mathbf{M} del momento de la fuerza respecto del polo O , dirigida a lo largo del eje a .

Si la línea de acción de la fuerza corta el eje o es paralela a él, el momento de la fuerza con respecto a este eje es nulo.

Sea A el punto de aplicación de la fuerza \mathbf{F} , y O_1 la base de la perpendicular bajada desde el punto A al eje considerado OZ (fig. 1.4.2). La fuerza \mathbf{F} conviene descomponerla en tres componentes perpendiculares entre sí: una axial \mathbf{F}_z , paralela al eje, otra radial \mathbf{F}_n , dirigida a lo largo del vector $\boldsymbol{\rho} = \vec{O_1A}$, y una tercera \mathbf{F}_τ dirigida perpendicularmente al eje y al vector $\boldsymbol{\rho}$. El momento de la fuerza \mathbf{F} con respecto al eje OZ es

$$M_z = [\boldsymbol{\rho} \mathbf{F}_\tau]_z$$

$$\mathbf{M}_z = [\boldsymbol{\rho} \mathbf{F}_\tau]$$

Como los vectores $\boldsymbol{\rho}$ y \mathbf{F}_τ son perpendiculares entre sí,

$$|\mathbf{M}_z| = |M_z| = \rho |F_\tau|.$$

El momento resultante, con respecto a un eje fijo a , de un sistema de fuerzas, es igual a la suma algebraica de los momentos, con respecto a este eje, de todas las fuerzas del sistema.

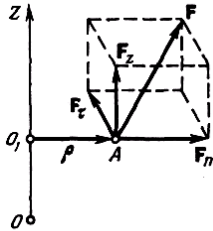


FIG. 1.4.2.

4°. Se llama *momento del impulso* (o *momento de la cantidad de movimiento*) de un punto material con respecto a un punto fijo O (polo), el vector \mathbf{L} igual al producto vectorial del radio vector \mathbf{r} trazado desde el polo O al lugar en que se encuentra el punto material, por el vector \mathbf{p} de su impulso:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{r}m\mathbf{v}],$$

donde m y \mathbf{v} son, respectivamente, la masa y la velocidad del punto material.

Recibe el nombre de *momento del impulso de un sistema con respecto a un punto fijo O* , la suma geométrica \mathbf{L} de los momentos de los impulsos, con respecto a este mismo punto O , de todos los puntos materiales del sistema:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i],$$

en la que m_i , \mathbf{r}_i y \mathbf{v}_i son, respectivamente, la masa, el radio vector y la velocidad del i -ésimo punto material, y n es el número total de estos puntos que hay en el sistema.

El *momento del impulso de un sistema con respecto a un eje fijo a* es la magnitud L_a igual a la proyección sobre este eje del vector \mathbf{L} del momento del impulso del sistema con respecto a un punto cualquiera O perteneciente al mismo eje: